MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja de problemas 2. Límites y continuidad

2-1. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$.

a) Hallar el dominio y la imagen de estas funciones;
b) Hallar $f(g(2))$ y $g(f(2))$;
c) Hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Sol. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = R(f)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1, +\infty)$; c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2} - 1$.

2-2. Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \ln(\operatorname{sen} x) \quad \text{b) } g(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x) \quad \text{c) } h(x) = \ln \sqrt{-x^2 + 4x - 3}.$$

Sol. a) $D(f) = \{x : \operatorname{sen} x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $R(f) = (-\infty, 0]$; b) $D(g = \{x : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, (k+1)\pi)$, $R(g) = (-\infty, 0]$; c) $D(h) = (1, 3)$, $R(h) = (-\infty, 0]$.

2-3. Repasar las gráficas de las funciones:

$$\text{a)} f(x) = x^2 \quad \text{b)} f(x) = e^x \quad \text{c)} f(x) = \ln x \quad \text{d) } f(x) = \operatorname{sen} x.$$

En cada caso dibujar las gráficas de las funciones siguientes a partir de las anteriores, interpretando geométricamente los resultados.

i) $g(x) = f(x+1)$ ii) $h(x) = -2f(x)$ iii) $p(x) = f(3x)$
iv) $s(x) = f(x) + 1$ v) $r(x) = |f(x)|$ vi) $m(x) = f(|x|)$

2-4. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones crecientes. Discutir la verdad o falsedad de las siguiente afirmaciones:

a) $f + g$ es una función creciente;
b) fg : es una función creciente;
c) $f - g$ es una función creciente si ambas funciones son positivas;
d) $f - g$ es una función creciente si ambas funciones son negativas.

Sol. a) Cierto; b) Falso: $f(x) = g(x) = x$ y $(fg)(x) = x^2$ no es creciente. Sin embargo, es cierto si ambas funciones son positivas; c) Falso: considerar $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ en $(0, +\infty)$; Falso: considerar $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ en $(-\infty, 0)$.

2-5. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones monótonas. Discutir cuando será $g \circ f$ creciente o decreciente dependiendo del comportamiento de f y g (en total, cuatro casos).

Sol. a) f, g ambas crecientes o ambas decrecientes; b) Una de ellas creciente y la otra decreciente.

2-6. Para cada una de las siguientes funciones, por ejemplo f, hallar los intervalos I, J para que $f : I \longrightarrow J$ sea biyectiva.

$$\text{a) } f(x) = x^2; \quad \text{b) } g(x) = \ln|x|; \quad \text{c) } h(x) = \operatorname{sen} x; \quad \text{d) } i(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Sol. a) Dos posibilidades: $I = [0, \infty)$ o $I = (-\infty, 0]$ y $J = [0, \infty)$;
b) Dos posibilidades : $I = (0, \infty)$ o $I = (-\infty, 0)$ y $J = (-\infty, \infty)$;
c) Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $I = [(k + \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{3}{2})\pi]$ y $J = [-1, 1]$;
d) Dos posibilidades: $I = (1, \infty)$ y $J = (-\infty, -1)$, o $I = (-\infty, 1)$ y $J = (-1, \infty)$.

2-7. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^3-5)^5; \quad g(x) = (\sqrt[3]{x-5})^5; \quad h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right); \quad i(x) = \frac{3x-1}{x-3}; \quad j(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \le x \le 0 \\ -2x & 0 < x \le 3 \end{cases}$$

Sol. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5+\sqrt[5]{x}}$; b) $g^{-1}(x) = 5 + (\sqrt[5]{x})^3$; c) $h^{-1}(x) = \frac{2e^x-1}{e^x-1}$; d) $i^{-1}(x) = i(x)$; e) $j^{-1}(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } 0 \le x \le 3; \\ -x/2, & \text{si } -6 \le x < 0. \end{cases}$

2-8. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos:

a) $f(x) = \cos 5x$ b)$g(x) = \operatorname{sen} 2x$ c) $h(x) = \cos 5x \operatorname{sen} 2x$ d) $k(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
e) $l(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}$ f) $m(x) = \dfrac{x^3}{x^5+1}$ g) $n(x) = \dfrac{\arctan}{x}$

2-9. Sea f una función par y g una función impar. Demuestra que:

$|g|$ es par; $f \circ g$ es par; $g \circ f$ es par; fg es impar; g^k es par (impar) si k es par (impar).

2-10. Determinar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, y calcular su periodo:
$f(x) = \operatorname{sen} 4x$; $g(x) = \tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$; $l(x) = \operatorname{sen}(3x+2)$.

2-11. Sea f una función cualquiera y g una función periódica. ¿Es posible afirmar que $f \circ g$ y $g \circ f$ sean periódicas? Justifica que $f(x) = \dfrac{\tan^2 3x + \ln(\tan 3x)}{1+\tan 3x}$ es periódica.

2-12. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\cos x+1}{x^2+1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4-ax^3}{x^2+1}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4-x^3}{x^2+b}$.

Sol. a) $-1/2$; b) 7; c) $1/2\sqrt{2}$; d) $1/\sqrt{3}$; e) 0; f) $\nexists$; g) $-\infty$; h) $+\infty$; i) 0 $\forall b$.

2-13. Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcular:

a)$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$;. b)$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

Sol. a) 4; b) 2; c) 3.

2-14. Calcula los siguientes límites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x-1)\operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan^4(x)}{1+\tan^4(x)}\right)$.
ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1+h^2(x)}{|x-2|}$, con $h(x)$ una función con límite finito cuando $x \to 2$.

Sol. a) 0; b) $+\infty$.

2-15. Calcular:

$$\text{a)} \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2}{x^2-9}; \quad \text{b)} \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2}{x^2-9}; \quad \text{c)} \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\operatorname{sen} x}; \quad \text{d)} \lim_{x\to 0^-} (1-1/x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{e)} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x^3}.$$

Sol. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) 0; $-\infty$.

2-16. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}; \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x^2-1}; \quad m(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad n(x) = e^{1/x}.$$

Sol. a) $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales, $y = x$ es asíntota oblicua en $\pm\infty$; c) $y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y $y = -x$ lo es en $-\infty$; d) $x = 1$ es asíntota vertical y $y = 0$ es asíntota horizontal; e) $x = 0$ es asíntota vertical y $y = 1$ es asíntotal horizontal en $\pm\infty$.

2-17. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

$$\text{a)} f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}; \qquad \text{b)} f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{si} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad x \ne 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \end{cases}$$

$$\text{c)}\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si} \quad x \le -1. \\ -1/2(1-x^{-2}) & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \qquad \text{d)}\ (*) f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & \text{si} \quad x < -1. \\ e^{1/x} & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \pi & \text{si} \quad x = 0 \\ 1/x & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

Sol. a) discontinua en $x = 3$; b) no es continua en $x = 0$ ni en $x = \pi/2$; c) no es continua en $x = 1$; d) no es continua en 0.

2-18. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

2-19. a) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado:

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[2, 4]$; ii) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0, 1]$.

b) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de ± 0.25.

Sol. i) $f(3) = 0$, luego $x = 3$ es un cero de f con total exactitud; ii) $f(1/2) = 1/8+3/2-2 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, luego $x = 0.75$ es un cero aproximado con error menor que ± 0.25.

2-20. Comprueba que las ecuaciones $x^4 - 11x + 7 = 0$ y $2^x - 4x = 0$ tienen al menos dos soluciones.

2-21. Discutir en los casos siguientes si las funciones alcanzan extremos globales y/o locales en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 \quad x \in [-1, 1]$ b) $f(x) = x^3 \quad x \in [-1, 1]$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad x \in [0, \pi]$ d) $f(x) = -x^{\frac{1}{3}} \quad x \in [-1, 1]$

Sol. a) Máximos globales en -1 y en 1, mínimo global en 0; b) mínimo global en -1, máximo global en 1; c)máximo global en $\pi/2$, mínimos globales en 0 y en π; d) mínimo global en 1, máximo global en -1.

2-22. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por $[0, \infty)$ o por $\mathbb{R}$ en cada una de las funciones.

Sol. En $[0, \infty)$: a) Mínimo global en 0, no existe máximo global; b) Mínimo global en 0, no existe máximo global; c) mínimos globales en $(3/2)\pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, máximos globales en $(1/2)\pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; d) máximo global en 0, no existe mínimo global.

En $\mathbb{R}$: a) Mínimo global en 0, no existe máximo global; b) no existen máximo ni mínimo globales; c) mínimos globales en $(3/2)\pi + 2k\pi$, k entero, máximos globales en $(1/2)\pi + 2k\pi$, k entero; d) No existen máximo ni mínimo globales.

2-23. a) Sea $C(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x - 1} + 100$, la función de costes totales de producción, suponiendo $x \geq 7$. Comprueba si tiene asíntota oblícua cuando $x \to \infty$.
b) Considera la función $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$, es decir, los costes medios de producción. Comprueba que tiene asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.
c) ¿Hay alguna relación entre la asíntota oblícua de la parte a) y la horizontal de la parte b)?

Sol. a) $y = 3x + 104$ es asíntota oblicua; b) $y = 3$.

2-24. Una entidad bancaria ofrece una cuenta corriente con las siguientes condiciones: los primeros 15.000 euros sin remunerar, y el resto al 7% de interés anual. Considera la siguiente función $i : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $i(x)$="interés obtenido en % al depositar un capital x y mantenerlo durante un año".

i) Obtener $i(x)$;
ii) Calcular $\lim_{x \to \infty} i(x)$;
iii) ¿Existe algún capital c para el que $i(c) = 7$?;
iv) ¿A partir de qué capital se obtiene al menos un 6% de interés?;
v) Dibuja la función i.

Sol. i) $i(x) = 7(x - 250.000)/x$ si $x \geq 250.000$; $i(x) = 0$ si $x < 250.000$; ii) 7: iii) No; iv) $x = 1.750.000$.